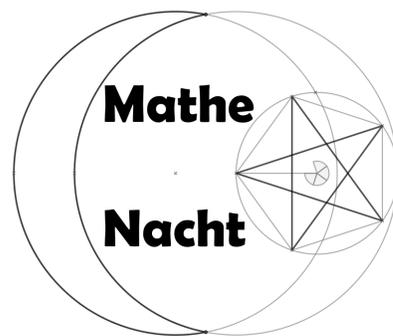
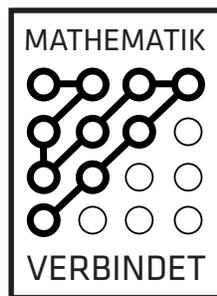


Matrizen und Determinanten



1. Aufgabe:

Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründe, warum die falschen Aussagen falsch sind.

1 Für $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist $\text{Det}(A + B) = \text{Det}(A) + \text{Det}(B)$.

2 Für $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ist $\text{Det}(AB) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$.

3 Ist $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertierbar, so ist $\text{Det}(A) \neq 0$.

4 Für $A \in M_{6 \times 4}(\mathbb{R})$ sind folgende Aussagen äquivalent:

a A hat vollen Rang

b $\text{Rg}(A) = 6$

5 Für $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ist $\text{Rg}(A) = \text{Rg}(A^t)$.

2. Aufgabe:

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Berechne die Determinante der Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ a & 1 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Finde eine rekursive Formel für $\text{Det}(A)$.

3. Aufgabe:

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? Bestimme in dem Fall die inverse Matrix von A ! Gib außerdem den Rang von A in Abhängigkeit von a an.

4. Aufgabe:

Berechne alle möglichen Produkte und Summen der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, D = (0 \ 1 \ 0), E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Aufgabe:

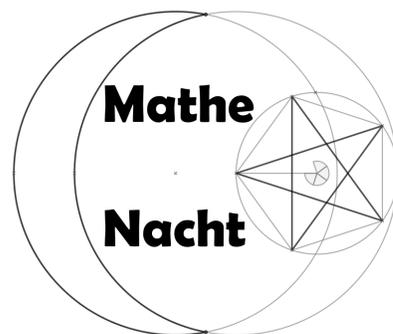
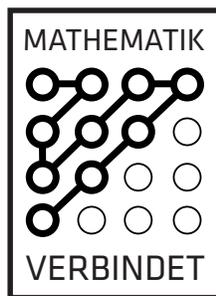
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass

$$(I_3 - A)^{-1} = \frac{1}{1 - 2pq} \begin{pmatrix} 1 - pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1 - pq \end{pmatrix}.$$

Abbildungsmatrizen



1. Aufgabe:

Gegeben seien die geordneten Basen des \mathbb{R}^3 bzw. \mathbb{R}^2 :

$$\hat{B} := ((1, 0, 1), (0, -1, 0), (2, 1, 0)), \hat{C} := ((1, 1), (1, -1)) \text{ und } \hat{D} := ((1, -2), (0, 1)).$$

a) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{C})$ für die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definiert durch:

$$\text{Für alle } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ sei } (x, y, z)^\alpha := (4x + y - 2z, -y + z).$$

b) Bestimme die Basiswechsellmatrix von \hat{C} nach \hat{D} .

c) Bestimme die Abbildungsmatrix $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{D})$ möglichst effizient.

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^3 , $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, gegeben durch

$$\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & -a & 0 \end{pmatrix}$$

a) Was ist $(2b_1 + b_3)^\alpha$?

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist α injektiv? Für welche ist α surjektiv?

c) Bestimme $\dim_{\mathbb{R}^3}(\text{Kern}(\alpha))$ und $\dim_{\mathbb{R}^3}(\text{Bild}(\alpha))$ für $a \neq 0$.

d) Gib ein konkretes Beispiel für einen 1-dimensionalen α -invarianten \mathbb{R} -Teilraum von \mathbb{R}^3 an.

3. Aufgabe:

Sei $n \in \mathbb{N}$ und \hat{B} eine geordnete \mathbb{R} -Basis des \mathbb{R}^n und $\alpha \in \text{End}(\mathbb{R}^n)$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Gib jeweils ein Gegenbeispiel an, das die Aussage widerlegt, oder Sätze aus der Vorlesung an, die die Aussage bestätigen.

α ist genau dann bijektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist.

α ist genau dann injektiv, wenn $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ vollen Rang hat.

Falls $\mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ invertierbar ist, gilt $\dim_{\mathbb{R}^n}(\text{Kern}(\alpha)) = \dim_{\mathbb{R}^n}(\text{Bild}(\alpha))$.

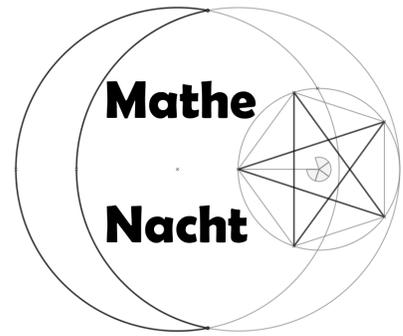
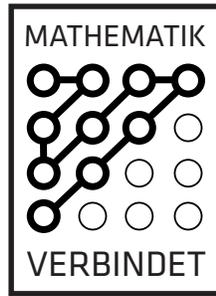
4. Aufgabe:

$$\text{Sei } A := \begin{pmatrix} -1 & 10 & 4 \\ 2 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Gibt es ein $\varphi \in \text{GL}(\mathbb{R}^3)$ und eine geordnete Basis \hat{B} des \mathbb{R}^3 so, dass $A = \mathcal{M}(\varphi, \hat{B}, \hat{B})$ ist?

Falls so ein φ existiert, dann wähle eine Basis \hat{B} und gib eine Funktionsvorschrift für φ an.

Lineare Gleichungssysteme



1. Aufgabe:

Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b := (1, 1, 1)$.

- Schreibe das Gleichungssystem in die Form $x * A = d$ um und kennzeichne die Koeffizientenmatrix, den Ergebnisvektor und den Variablenvektor jeweils mit blau, rot und grün.
- Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix A^* hin. Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen ohne sie explizit zu berechnen? Ist sie leer, enthält sie eins oder mehrere Elemente?
- Nun einmal andersherum:
Schreibe das Gleichungssystem $x * B = b$ mit einzelnen Gleichungen und Variablen x_1, x_2, x_3 hin.
- Bestimme nun für das Gleichungssystem aus (c) die Lösungsmenge, indem du eine Lösung errätst und dann mit dem dazugehörigen HLGS weiter machst.

2. Aufgabe:

Vervollständige die Koeffizientenmatrix $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem

$$x * A = (1, 2, 1)$$

- genau eine Lösung hat.
- unlösbar ist.
- unendlich viele Lösungen hat.

3. Aufgabe:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $d := (a, 6, 0)$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

4. Aufgabe:

Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $d := (1, 2, 1)$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

5. Aufgabe:

Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4 \\2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= -8\end{aligned}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständige Lösungsmenge des LGS.

6. Aufgabe:

Gegeben seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (0, 1, 0)$ sagen?
- Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (1, 0, 1)$ sagen?
- Gibt es einen Vektor $d \in \mathbb{R}^3$, für den das LGS $x * B = d$ genau eine Lösung hat?

7. Aufgabe:

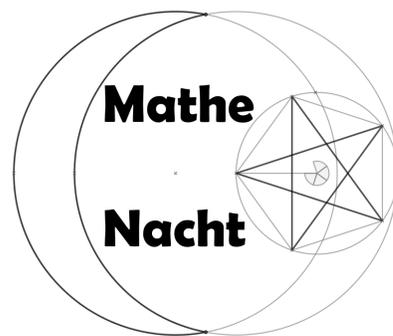
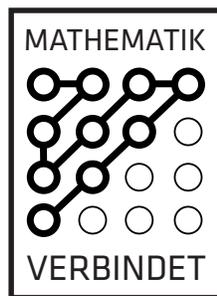
Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$.

- Ist die Lösungsmenge des LGS ein \mathbb{R} -Teilraum von \mathbb{R}^3 ?
- Falls die Lösungsmenge ein \mathbb{R} -Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

8. Aufgabe:

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (1, 4)$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

Eigenwerte, Eigenräume, Diagonalisierbarkeit



1. Aufgabe: (Eigenwerte)

Seien immer K ein Körper, V ein K -Vektorraum und $\varphi \in \text{End}_K(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Berechne jeweils $\text{Spek}(\varphi)$.

- $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und für alle $(a, b, c) \in V$ ist $(a, b, c)^\varphi := (c, b, a)$.
- $K = \mathbb{R}, V = \mathbb{R}^3$ und φ ist gegeben durch $(1, 0, 0)^\varphi = (3, 1, 0)$, $(0, 1, 0)^\varphi = (0, 4, 0)$ und $(0, 0, 1)^\varphi = (4, 0, 0)$.
- $K = \mathbb{R}, \dim_K(V) = 3$, \hat{B} ist eine geordnete Basis von V und φ ist gegeben durch

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Welche Eigenwerte hat φ aus c), wenn $K = \mathbb{C}$ ist?

2. Aufgabe: (Eigenräume, Diagonalisierbarkeit)

Sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ eine geordnete Basis von \mathbb{R}^3 und $\varphi \in \text{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Berechne alle Eigenräume von φ . Ist φ diagonalisierbar? Ist φ bijektiv?
- Sei nun $\alpha \in \text{Eig}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 18 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis. Zeige, dass α diagonalisierbar ist, bestimme alle Eigenräume und finde eine geordnete Basis \hat{D} so, dass $M(\alpha, \hat{D}, \hat{D})$ eine Diagonalmatrix ist. Ist α bijektiv?

3. Aufgabe: (*Diagonalisierbarkeit*)

Es sei V ein dreidimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Folgende Informationen sind gegeben. Entscheide in jedem Fall, ob φ diagonalisierbar ist oder nicht oder ob man keine Aussage treffen kann.

- a) $P_{\varphi} = (x - 1)(x - 2)(x - 10)$
- b) $P_{\varphi} = (x - 1)^2 \cdot x$.
- c) $P_{\varphi} = (x - 1)^2 \cdot x$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Eig}(\varphi, 1)) = 2$.
- d) $P_{\varphi} = (x^2 + 1) \cdot (x - 5)$.
- e) $\text{Spek}(\varphi) = \{-1, 0\}$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Eig}(\varphi, -1)) = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Eig}(\varphi, 0)) = 1$.

4. Aufgabe: (*Spektralzerlegung*)

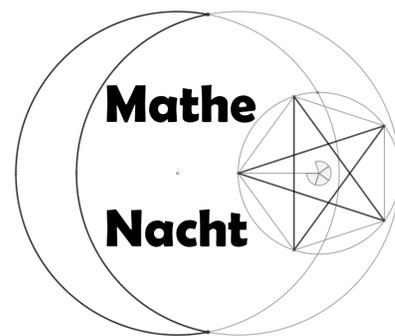
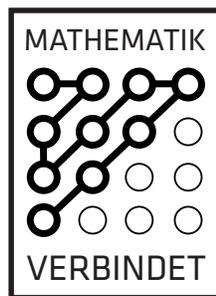
Sei $\varphi \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch die Abbildungsmatrix

$$M(\varphi, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Standardbasis.

- a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenräume vom φ . Ist φ diagonalisierbar?
- b) Es seien U_1 und U_2 die Eigenräume bezüglich φ . Gib eine Abbildungsvorschrift für die Projektionen π_1 auf U_1 und π_2 auf U_2 an.

Zusammenhänge und Beweise



1. Aufgabe:

Beweise folgende Aussagen kurz!

- Seien K ein Körper, V ein K -Vektorraum, $\alpha \in \text{End}_K(V)$ und $\lambda \in K$ ein Eigenwert von α . Dann ist λ^2 ein Eigenwert von α^2 .
- Seien K ein Körper, n eine natürliche Zahl und V und W seien n -dimensionale K -Vektorräume. Weiter sei \hat{B} eine geordnete K -Basis von V und \hat{C} eine geordnete K -Basis von W . Wie in Satz 5.5. ordne Φ^{-1} jeder Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ eine K -lineare Abbildung aus $\text{Hom}_K(V, W)$ zu. Zeige, dass $\dim_K(\text{Kern}(A^{\Phi^{-1}})) = \dim_K(\text{Kern}((A^t)^{\Phi^{-1}}))$ gilt.
Anders ausgedrückt: Der Kern der zu A gehörenden linearen Abbildung hat die gleiche Dimension wie der Kern der zu A^t gehörenden linearen Abbildung.
- Sei A eine $n \times m$ -Matrix mit Einträgen aus dem Körper K . Gegeben sei das homogene lineare Gleichungssystem $x * A = 0_{K^m}$. Ist y eine Lösung des HLGS, so ist auch $y + y$ eine Lösung.

2. Aufgabe:

Sei $\hat{B} = ((1, 1, 0), (1, 2, 0), (0, 0, -2))$ eine geordnete \mathbb{R} -Basis von \mathbb{R}^3 und $\hat{C} = ((1, 0, 0, 0), (0, 2, 2, 0), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 2))$ eine geordnete \mathbb{R} -Basis von \mathbb{R}^4 . Wir betrachten eine Abbildung $\alpha : M_{3 \times 4}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^4$ wie folgt: Es sei $\varphi_A \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ die Abbildung, für die gilt: $M(\varphi_A, \hat{B}, \hat{C}) = A$. Dann sei $A^\alpha = (1, 1, 0)^{\varphi_A}$.

- a) Sei

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechne M^α .

- Begründe, warum es sich bei α um eine wohldefinierte Abbildung handelt und zeige, dass α ein Vektorraumhomomorphismus ist.
- Ist α surjektiv? Ist α injektiv? Widerlege oder beweise!
- Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat eine Abbildungsmatrix zu α ? Wähle geeignete Basen und berechne die Einträge der ersten Zeile der Abbildungsmatrix. Gib Eigenschaften der Abbildungsmatrix an, ohne sie konkret zu berechnen!
- Gib ein lineares Gleichungssystem an, dessen Lösungsmenge der Kern von α oder isomorph dazu ist.